10 SONSUZ DİZİLER VE SERİLER

10.1 Diziler

Dizinin resmi olmayan tanımını, birşeylerin bir sıralı listesi olarak tanımlayabiliriz. Biz bu şeyleri genellikle sayılar olarak alıyoruz. Bu bölümde de sayıların $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ dizisi ve fonksiyonların $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx, \dots$ gibi dizisi ile ilgileneceğiz.

Tanım: Sayıların bir sonsuz dizisi, tanım kümesi, bir n_0 tamsayısına eşit veya daha büyük olan tamsayılar kümesi olan bir fonksiyondur.

Genellikle, n_0, 1 ve dizinin tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi alınır. Bazen n_0'ı 0'dan, -1'den veya 4'den başlatabiliriz.

Örneğin, $a(n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $a(n) = 2n$ ile verilen fonksiyon bir dizidir. Tanım kümesindeki n tamsayılarını, genellikle dizileri temsil ettiğinde indis olarak gösteririz. Yani $a(n)$ yerine a_n yazarız. Buna göre, $a_n = 2n$, $n = 1, 2, \dots$ ile gösteririz. Dolayısıyla bir diziyi verilen bir sırada

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

sayılarının bir listesi olarak tanımlayabiliriz. a_1'e birinci terim, a_2'ye 2. terim ve a_n'ye n. terim deriz.

$$a_n = \sqrt{n}, \quad b_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad c_n = (-1)^{n+1}, \quad d_n = \frac{n}{n+1}, \quad e_n = 3$$

dizilere örnektir. Terimlerini küme olarak listelersek:

$$\{a_n\} = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$$

$$\{b_n\} = \{1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, (-1)^{n+1}\tfrac{1}{n}, \dots\}$$

$$\{c_n\} = \{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$$

$$\{d_n\} = \{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \dots, \tfrac{n}{n+1}, \dots\}$$

$$\{e_n\} = \{3, 3, 3, \dots, 3, \dots\}.$$

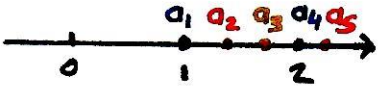
Yakınsaklık ve Iraksaklık

Bazen, bir dizideki sayılar n indisi arttığında tek bir değere yaklaşır. Örneğin,

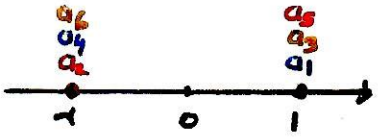
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, 0'a yaklaşır,

$\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n}{n+1}, \dots\}$, 1'e yaklaşır.

Diğer taraftan bazı diziler n indisi arttıkca $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{n}, \dots\}$ bir sayıdan daha büyük terimlere sahip olur. Bazı dizilerde birden fazla sayıya yaklaşır:



$\{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots\}$, 1 ve -1 arasında gider gelir.



Tanım: Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n > N$ şartını sağlayan her n için

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N tam sayısı bulabiliyorsak, $\{a_n\}$ dizisine, L sayısına <u>yakınsar</u> deriz. Eğer böyle bir L sayısı yoksa, $\{a_n\}$ dizisine <u>ıraksaktır</u> denir. Eğer $\{a_n\}$, L'ye yakınsıyor ise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{veya} \quad a_n \to L$$

ile gösterilir ve L sayısına dizinin <u>limiti</u> denir.

Bu tanım, x sonsuza giderken bir $f(x)$ fonksiyonunun limitinin tanımına çok benzerdir. ($\lim_{x\to\infty} f(x)$).

Örnekler: 1) a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ b) $\lim_{n\to\infty} k = k$ (k bir sabit) olduğunu gösteriniz.

a) $\varepsilon > 0$ verilsin. $n > N$ şartını sağlayan her n için $|a_n - 0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir N tamsayısının olduğunu göstermeliyiz.

$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{veya} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

olmalıdır. Eğer N'yi $\frac{1}{\varepsilon}$'dan daha büyük bir tamsayı alırsak ($N = [\![\frac{1}{\varepsilon}]\!]$, $n > N$) yukarıdaki eşitsizlik sağlanır. Yani $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ dır.

b) $\varepsilon>0$ verilsin. $|a_n-k|=|k-k|=0<\varepsilon$ olduğundan herhangibir N tamsayısı için $n>N$ şartını sağlayan her n için yukarıdaki eşitsizlik sağlandığından $\lim_{n\to\infty} k=k$ dır.

2) $\{1,-1,1,-1,\dots,(-1)^{n+1},\dots\}$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

Bu dizinin bir L sayısına yakınsadığını düşünelim. ε'nu $0<\varepsilon<1$, örneğin $\varepsilon=\frac{1}{2}$ alalım. Bir N tamsayısından büyük n indisleri için a_n nin bütün terimleri L'nin $1/2$ komşuluğunda olmak zorundadır. Dizinin her bir diğer teriminde 1 görüldüğünden 1, L'nin $\varepsilon=1/2$ uzaklığının içinde olmalıdır; yani $|L-1|<\frac{1}{2}$ veya $\frac{1}{2}<L<3/2$ olmalıdır. Büyük indisler için -1 bu aralığın içinde olamaz. -1'i içeren $1/2$ komşuluğu $|L-(-1)|<\frac{1}{2}$ veya $-\frac{3}{2}<L<-1/2$ dir. L, bu iki aralığın içinde aynı anda olamayacağı için L limiti yoktur, yani dizi ıraksaktır.

$\{\sqrt{n}\}$ dizisi de ıraksaktır, fakat farklı bir anlamda. n arttıkça dizinin terimleri herhangi bir sabit sayıdan daha büyük oluyor. Bunu

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$$

ile gösteriyoruz.

Tanım: Her M sayısı için, $n>N$ şartını sağlayan her n için $a_n>M$ olacak şekilde bir N tamsayısı bulunabiliyorsa $\{a_n\}$ dizisi <u>sonsuza ıraksar</u> denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ veya $a_n\to\infty$ ile gösterilir. Benzer şekilde, verilen her M sayısına karşılık, $n>N$ şartını sağlayan her n için $a_n<M$ olacak şekilde bir N tamsayısı bulunabiliyorsa $\{a_n\}$'ye <u>$-\infty$ ıraksar</u> denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ veya $a_n\to-\infty$ ile gösterilir.

$\{1,-2,3,-4,5,-6,7,-8,\dots\}$ veya $\{1,0,3,0,5,0,7,\dots\}$ dizileri ∞ veya $-\infty$'a ıraksamaz.

Dizilerin Limitlerini Hesaplama

Teorem: $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ reel sayı dizileri ve A, B reel sayılar olsun $\lim_{n\to\infty} a_n=A$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n=B$ ise aşağıdaki kurallar sağlanır:

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=A+B$ 2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=A-B$ 3) $\lim_{n\to\infty}(k\cdot b_n)=kB$ (k sabit)

4) $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot b_n=A\cdot B$ 5) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{A}{B}$, $B\neq 0$.

Örnek: a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=-1.\lim\frac{1}{n}=-1.0=0$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=5.0.0=0$

d) $\lim_{n\to\infty}\frac{2-3n^4}{n^4+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^4}-3}{1+5/n^4}=\frac{0-3}{1+0}=-3.$

Teorem: Sandeviç Teoremi: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ reel sayı dizileri olsun. Belli bir N'den sonraki bütün n'ler için $a_n\le b_n\le c_n$ ve $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$ ise $\lim_{n\to\infty}b_n=L$ dir.

Örnek: a) $\frac{\cos n}{n}\to 0$, $-\frac{1}{n}\le\frac{\cos n}{n}\le\frac{1}{n}$ (veya $\left|\frac{\cos n}{n}\right|\le\frac{1}{n}$) olduğundan.

b) $\frac{1}{2^n}\to 0$, $0\le\frac{1}{2^n}\le\frac{1}{n}$ olduğundan,

c) $(-1)^n\frac{1}{n}\to 0$, $-\frac{1}{n}\le(-1)^n\frac{1}{n}\le\frac{1}{n}$ (veya $\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|\le\frac{1}{n}$) olduğundan.

Teorem: Dizilar İçin Sürekli Fonksiyon Teoremi: $\{a_n\}$, reel sayılar dizisi olsun. $a_n\to L$, f, L'de sürekli bir fonksiyon ve bütün a_n değerlerinde tanımlı ise $f(a_n)\to f(L)$ dir.

Örnek: a) $\sqrt{n+1/n}\to 1$ olduğunu gösteriniz.

$\frac{n+1}{n}\to 1$ olduğunu göstermiştik. $f(x)=\sqrt{x}$ bütün a_n değerlerinde tanımlı ve L=1'de sürekli olduğundan $\sqrt{n+1/n}\to\sqrt{1}=1$ dir.

b) $\frac{1}{n}\to 0$ dır. $a_n=\frac{1}{n}$, $f(x)=2^x$ ve L=0 alırsa Teoremi sağlar. Buna göre $2^{1/n}=f(1/n)\to f(L)=2^0=1$ dir. Yani $\sqrt[n]{2}=2^{1/n}\to 1$ dir.

L'Hopital Kuralını Kullanma

Teorem: f(x), bütün $x\ge n_0$ için tanımlı bir fonksiyon ve $\{a_n\}$ dizisi $n\ge n_0$ için $a_n=f(n)$ şartını sağlayan bir reel sayılar dizisi olsun. Bu durumda,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L \implies \lim_{n\to\infty}a_n=L$$

dir.

Örnekler: 1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$ olduğunu gösteriniz.

$x\ge 1$ için $\frac{\ln x}{x}$ fonksiyonu teoremin şartlarını sağlar. Buna göre,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0,$$

ve buradan $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ sonucunu elde ederiz

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4n} = ?$. $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{4n} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{4} = \infty$.

3) n. terimi $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ olan dizi yakınsak mıdır? Öyleyse $\lim_{n\to\infty} a_n = ?$.

Limit olmaya çalıştığımızda, 1^∞ belirsizliği ortaya çıkacaktır. Önce logaritma alalım:

$$\ln a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln a_n = \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) (\infty \cdot 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{n^2-1}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2.$$

$\ln a_n \to 2$ ve $f(x) = e^x$ sürekli olduğundan bir önceki teoreme göre

$$a_n = e^{\ln a_n} \to e^2$$

dir. $\{a_n\}$ dizisi e^2'ye yakınsar.

Yaygın Kullanılan Limitler

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ 2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 3) $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$, $x>0$

4) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, $|x|<1$ 5) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ 6) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

Örnek: a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{\ln n}{n} = 2 \cdot 0 = 0$

b) $\sqrt[n]{n^2} = n^{2/n} = (n^{1/n})^2 \to 1^2 = 1$

c) $\sqrt[n]{4n} = 4^{1/n} \cdot n^{1/n} \to 1 \cdot 1 = 1$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \left(x = -\frac{2}{3}\right)$

e) $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n \to e^{-2}$

f) $\frac{7^n}{n!} \to 0$.

Altdiziler ve Sınırlı Diziler

Altdiziler

Bir dizinin terimleri, başka bir dizide verilen sıralamada görünüyorsa ilk diziye ikinci dizinin bir altdizisi denir.

Örnek: $\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$ dizisinin bazı alt dizileri, $\{2,4,6,\dots,2n,\dots\}$ $\{1,3,5,\dots,2n-1,\dots\}$, $\{2,3,5,7,11,\dots\}$ dir.

Altdiziler, iki sebebden dolayı önemlidir:

1) Yakınsak bir $\{a_n\}$ dizisinin limiti L ise bütün altdizilerde L'ye yakınsar.
2) Bir $\{a_n\}$ dizisinin, herhangi bir altdizisi ıraksak veya iki altdizi farklı limitlere sahipse, $\{a_n\}$ ıraksaktır. Örneğin $\{(-1)^n\}$ dizisi, tek numaralı terimlerden oluşan $-1,-1,\dots,-1,\dots$ altdizisinin limiti -1, çift numaralı terimlerden oluşan $1,1,\dots,1,\dots$ altdizisinin limiti 1 olduğundan ıraksaktır.

Monotonik ve Sınırlı Diziler

Tanım: Bir $\{a_n\}$ dizisi, her n için $a_n \le a_{n+1}$ şartını sağlıyorsa, yani, $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \dots \le a_n \le a_{n+1} \le \dots$ ise bir <u>azalmayan</u> dizi (artan) denir. Her n için $a_n \ge a_{n+1}$ şartını sağlıyorsa, yani, $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots$ ise <u>artmayan</u> dizi (azalan) denir. Bir dizi azalmayan veya artmayan ise <u>monotonik</u> denir.

Örnekler: 1) a) $1,2,\dots,n,\dots$ azalmayan, b) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$ azalmayan, c) $\frac{3}{8},\frac{3}{9},\frac{3}{10},\dots,\frac{3}{n+7},\dots$ artmayan d) $3,3,\dots,3,\dots$ hem azalmayan hem de artmayan dizilerdir.

2) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$ dizisinin azalmayan bir dizi olduğunu gösteriniz.

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)-1}{(n+1)+1}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=\frac{n^2+n-(n^2+n-2)}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$$ dir. $n\ge 1$ için $a_{n+1}-a_n\ge 0$ yani $a_{n+1}\ge a_n$ dir.

Dizinin azalmadığını göstermenin diğer bir yolu da, $f(n)=\frac{n-1}{n+1}$ dizisini, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyonu gibi düşünüp türev ile bakmaktır.

$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-1\cdot(x-1)}{(x+1)^2}=2/(x+1)^2>0$, f artan fonksiyondur. Dolayısıyla $a_{n+1}\geq a_n$ dir.

Tanım: Her n için $a_n\leq M$ olacak şekilde bir M sayısı varsa $\{a_n\}$ dizisine <u>üstten sınırlı</u> denir. M sayısına, $\{a_n\}$ için bir <u>üst sınır</u> denir. Her n için $m\leq a_n$ olacak şekilde bir m sayısı varsa diziye <u>altten sınırlı</u> ve m sayısına, $\{a_n\}$ için bir <u>alt sınır</u> denir. Altten ve üstten sınırlı diziye, <u>sınırlı dizi</u> denir.

Örnek: a) $1,2,3,\dots,n,\dots$ dizisi altten $M=1$ ile sınırlıdır. Fakat bir üst sınırı yoktur.

b) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$ dizisi altten $M=\frac{1}{2}$ ve üstten $M=1$ ile sınırlıdır.

c) $-1,2,-3,4,\dots,(-1)^n n,\dots$ dizisi ne altten ne de üstten sınırlıdır.

$a_n=(-1)^n$, örneğinde olduğu gibi her sınırlı dizinin yakınsak olmayacağı gibi her monotonik dizi de yakınsak değildir. Örneğin $1,2,\dots,n,\dots$ dizisi monotonik, fakat ıraksaktır. Sınırlı ve monotonik bir dizi ise yakınsak olmak zorundadır.

Teorem: Her sınırlı ve monotonik dizi yakınsaktır.

Örnek: a) $\{\frac{n}{n+1}\}$ dizisi üstten $M=1$ ile sınırlı ve azalmayan bir dizi olduğundan yakınsaktır. Gerçekten, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+0}=1$, dizi $L=1$'e yakınsar.

b) $\{\frac{1}{n+1}\}$ dizisi artmayan ve $M=0$ ile altten sınırlı olduğundan yakınsaktır. Dizi, $L=0$'a yakınsar.

Eğer M, $\{a_n\}$ için bir üst sınır ve $\{a_n\}$ için M'den daha küçük üst sınır yoksa M'ye $\{a_n\}$'nin <u>en küçük üst sınırı</u> denir. Benzer olarak m bir alt sınır ve m'den daha büyük alt sınır yoksa m'ye $\{a_n\}$'nin <u>en büyük alt sınırı</u> denir. Bir dizi sınırlı değilse, <u>sınırsız</u> denir.

İndirgeme Bağıntısı (recursion formula) ile Verilen Diziler

Bazen a_n genel terimi doğrudan verilmez. Bunun yerine, önce dizinin başlangıç terimi veya terimleri verilir, sonra da önceki terimlerden dizinin sonraki terimleri hesaplanır.

Örnek: a) $a_1=1$ ve $a_n=n.a_{n-1}$ dizisi $1,2,6,24,\dots,n!,\dots$ dizisini tanımlar. $a_1=1$, $a_2=2.a_1=2$, $a_3=3.a_2=6$, $a_4=4.a_3=24$ ve diğerleri.

b) $a_1=1$, $a_2=1$ ve $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ dizisi $1,1,2,3,5,\dots$ Fibonacci sayılarının dizisini tanımlar. $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=a_2+a_1=1+1=2$, $a_4=a_3+a_2=2+1=3$, $a_5=a_4+a_3=3+2=5$, $a_6=a_5+a_4=5+3=8$ ve diğerleri.

c) $x_0=1$, $x_{n+1}=x_n-\dfrac{\sin x_n-x_n^2}{\cos x_n-2x_n}$ dizisi $\sin x-x^2=0$ denkleminin çözümüne yakınsayan bir diziyi tanımlar.

Bu dizilerin yakınsaklığını incelerken genellikle monotonik ve sınırlı dizilerin teoreminden faydalanılır.

Örnek: $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+5}{2}$, $n\geq 1$ indirgeme bağıntısı ile verilen diziyi inceleyiniz.

Dizinin birkaç terimini yazalım: $a_1=1$, $a_2=\dfrac{a_1+5}{2}=\dfrac{1+5}{2}=3$, $a_3=\dfrac{a_2+5}{2}=\dfrac{3+5}{2}=4$, $a_4=\dfrac{a_3+5}{2}=\dfrac{9}{2}$, $a_5=\dfrac{a_4+5}{2}=\dfrac{9/2+5}{2}=\dfrac{19}{4}$, ...

$$a_{n+1}-a_n=\frac{a_n+5}{2}-a_n=\frac{a_n+5-2a_n}{2}=\frac{5-a_n}{2}$$

($a_1=1<5$, $a_2=3<5$, ..., $a_n<5$ olsun. $a_{n+1}=\dfrac{a_n+5}{2}<\dfrac{5+5}{2}=5$ olduğundan tümevarım ilkesine göre her n için $a_n<5$ dir.)

Bu durumda $a_{n+1}-a_n=\dfrac{5-a_n}{2}>\dfrac{5-5}{2}=0 \Rightarrow a_{n+1}>a_n$ dir.

Dizi, üstten 5 ile sınırlı ve azalmayan olduğundan yakınsaktır. Dizinin limitini de bulabiliriz. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+5}{2} \Rightarrow a=\frac{a+5}{2} \Rightarrow a=5 \text{ elde edilir.}$$

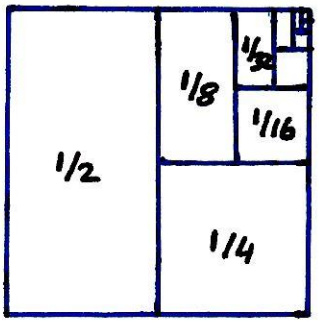
Yani $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=5$ dir.

10.2 Sonsuz Seriler

Bir sonsuz seri,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

bir sonsuz sayılar dizisinin toplamıdır. Bu bölümde amaç, böyle bir sonsuz toplamın ne demek olduğunu anlayıp, bu toplamı hesaplamak için yöntemler geliştirmektir.



Örneğin, kenarı 1 birim olan bir kare düşünelim. Karenin alanı 1 birim karedir. Eğer bu kareyi ikiye böler, sonra ikiye böldüğümüz parçalardan birini tekrar ikiye böler, bu son böldüğümüz parçalardan birini tekrar ikiye böler ve bu işlemi sonsuza kadar yaparsak, bu bölünen parçaların alanlarının toplamı da sezgisel (gerçek) olarak 1 birim^2 olmalıdır:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1.$$

Bu örnekte olduğu gibi sonsuz toplamı anlamlı hale getirmeliyiz. Bunun için, serinin ilk n toplamına bakıyoruz:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Bu toplam sonlu olduğu için, normal toplama işlemi ile hesaplayabiliriz. Buna serinin <u>n. kısmi toplamı</u> denecektir. n sayısını artırdıkça bu toplamların oluşturduğu S_n sayı dizisinin limiti bir değere yaklaşırsa, biz bu değere, sonsuz serinin <u>toplamı</u> diyeceğiz.

Örneğin, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ serisini ele alalım.

Kısmi toplam		Değeri	Önerilen değer
Birinci	$S_1 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1 - \frac{1}{2}$
İkinci	$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$1 - \frac{1}{4}$
Üçüncü	$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$1 - \frac{1}{8}$
⋮	⋮	⋮	⋮
n.	$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$	$\frac{2^n - 1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^n}$

kısmi toplamların oluşturduğu bu dizinin n. terimi $s_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ dir. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ olduğundan, bu kısmi toplamlar dizisi 1'e yakınsar. İşte

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

serisinin toplamına 1'dir diyeceğiz.

Tanım: Verilen bir $\{a_n\}$ sayılar dizisi için

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

formundaki bir ifadeye bir <u>sonsuz seri</u> denir. a_n sayısı, serinin <u>n. terimidir</u>.

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
$$\vdots$$

ile tanımlanan $\{s_n\}$ dizisi, serinin <u>kısmi toplamlar dizisidir</u> ve s_n sayısı <u>n. kısmi toplamdır</u>. Kısmi toplamlar dizisi bir L limitine yakınsarsa, seriye <u>yakınsak</u> denir ve serinin <u>toplamı</u> L'dir. Bu durumda

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

şeklinde yazarız. Kısmi toplamlar dizisi yakınsak değilse, seriye <u>ıraksak</u> denir.

Geometrik Seriler

a ve r, sabit reel sayılar ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

formundaki serilere <u>geometrik seriler</u> denir. Geometrik seriyi, aynı zamanda $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ olarak da yazabiliriz.

Eger $r=1$ ise geometrik serinin kısmi toplamlar dizisi

$$s_n = a + a.1 + a.1^2 + \cdots + a.1^{n-1} = na$$

olacağından, a'nın işaretine göre $\lim_{n\to\infty} na = \pm\infty$ olacaktır. Yani, $r=1$ alındığında geometrik seri ıraksaktır. $r=-1$ alındığında, kısmi toplamlar dizisi 0 ile a arasında değişeceğinden, seri tekrar ıraksak olur. Şimdi $|r| \neq 1$ durumunda geometrik serinin yakınsaklığını inceleyelim:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$
$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + ar^n$$
$$S_n(1-r) = a - ar^n \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad (r \neq 1)$$

Eğer $|r|<1$ ise $r^n \to 0$ ve $S_n \to \frac{a}{1-r}$ olacaktır. Eğer $|r|>1$ ise $|r^n| \to \infty$ olacağından seri ıraksak olacaktır.

$|r|<1$ ise $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ geometrik serisi $\frac{a}{1-r}$'ye yakınsar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r|<1.$$

$|r|>1$ ise seri ıraksaktır.

Örnekler: 1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ geometrik serisinde $a = \frac{1}{2}$ ve ve $r = \frac{1}{2}$ dir. Yakınsaktır ve toplamı $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ dir.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5}{4^n} = 5 - \frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \dots$ geometrik serisinde $a = 5$ ve $r = -\frac{1}{4}$ dür. Yakınsaktır, $\frac{a}{1-r} = \frac{5}{1+1/4} = 4$ sayısına yakınsar ve toplamı 4 dür.

3) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^3}{8} + \dots$ geometrik serisinde $r = \frac{\pi}{2} > 1$ olduğundan seri ıraksaktır.

4) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^{k-1}$ serisinde $a=1$ ve $r = \frac{2}{7}$ dir. Geometrik serinin toplamı $\frac{1}{1-2/7} = \frac{7}{5}$ dir.

5) Bir zıplayan top: Bir tenis topu, düz bir yüzeye a yüksekliğinden atılıyor. Top bir h yüksekliğinden düştüğünde, her seferinde yere çarpıyor ve sıçrama yüksekliği rh dır. Burada r, pozitif fakat 1'den küçüktür. Topun yükselip alçaldığı toplam uzunluğu bulunuz.

$$S = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \dots}_{\frac{2ar}{1-r}} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\,\frac{1+r}{1-r}$$

Eğer $a = 6$ m ve $r = 2/3$ ise $S = 6 \cdot \frac{1+2/3}{1-2/3} = 30$ m dir.

6) Devirli ondalık kesir (tekrarlayan kesirli sayı) 5.232323... sayısını iki tamsayının oranı olarak ifade ediniz.

$$5.232323\dots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \dots = 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \dots\right)}_{\frac{1}{1-1/100}}$$

$$= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}.$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (teleskoping) serisinin toplamını bulunuz.

$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ yazabiliriz. Bu durumda, kısmi toplamlar dizisi

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{k-1}} - \cancel{\tfrac{1}{k}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{k}} - \tfrac{1}{k+1}\right)$$

$$S_k = 1 - \frac{1}{k+1} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} S_k = 1,$$ seri yakınsak ve

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ dir.

Iraksak Seriler

Örnekler: 1) $1-1+1-1+\cdots$ serisi yakınsak mıdır?

Kısmi toplamlar dizisi $1,0,1,0,1,0,\dots$ olduğundan limiti yoktur. Dolayısıyla seri ıraksaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{n+1}{n} + \cdots$ serisinde her terim 1'den büyük olduğundan, kısmi toplamlar dizisi S_n, n'den büyüktür, dolayısıyla $S_n \to \infty$ dur. Yani seri ıraksaktır.

Iraksaklık için n. terim Testi

Eğer $\sum a_n$ serisi yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ dir. Bir dizide $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n+1} = S$ olduğundan

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

dır.

Teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır.

Iraksaklık için n. terim Testi: $\lim_{n\to\infty} a_n$ yok veya sıfırdan farklı ise $\sum a_n$ serisi ıraksaktır.

Örnekler: 1) a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ serisi, $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$ olduğundan ıraksaktır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ serisi, $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$ olduğundan ıraksaktır.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ serisi, $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ olmadığından ıraksaktır.

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2n^2}{3n^2+n+1}$ serisi, $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n^2}{3n^2+n+1} = -\frac{2}{3} \neq 0$ olduğundan ıraksaktır.

2) $1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ tane}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ tane}} + \frac{1}{8} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{2^n \text{ tane}} + \dots = 1+1+1+\dots+1+\dots$

olduğundan ıraksaktır. Fakat bu serinin genel teriminin limiti sıfırdır.

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisinin de genel teriminin limiti 0'dır. ($\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$). Fakat seri ıraksaktır. (Derste gösterilecek, ortaokul öğrencisinin çözümüyle)

Teorem: $\sum a_n = A$ ve $\sum b_n = B$ ise

1) $\sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A+B$ 2) $\sum(a_n-b_n) = A-B$

3) $\sum k a_n = k\sum a_n = kA$ (k, sabit)

1) Iraksak bir serinin sıfırdan farklı bir sayı ile çarpımı ıraksaktır.

2) $\sum a_n$ yakınsak ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum(a_n+b_n)$ ve $\sum(a_n-b_n)$ ıraksaktır.

Dikkat: Iraksak $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ serilerinin $\sum(a_n+b_n)$ toplamı yakınsak olabilir. Örneğin $\sum a_n = 1+1+1+\cdots$ ve $\sum b_n = (-1)+(-1)+\cdots$ ıraksak, fakat $\sum(a_n+b_n) = 0+0+\cdots+0+\cdots$ serisi 0'a yakınsar.

Örnek: a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}-1}{7^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-4/7} - \frac{1}{1-1/7} = \frac{7}{6}.$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{2^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 4\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 8.$

Bir seriye sonlu eleman <u>ekleyip veya çıkarmamız</u>, serinin karakterini değiştirmez. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise herhangibir $k>1$ için $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ de yakınsaktır: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n} = \frac{1}{9}+\frac{1}{81}+\frac{1}{729}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{9^n} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{9^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n}-\frac{1}{9}-\frac{1}{81}-\frac{1}{729}.$$

Bir seride terimlerin sırasını korıyorak, serinin yakınsaklığını değiştirmeksizin <u>tekrar indisleyebiliriz.</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1+a_2+\cdots$$

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ geometrik serisini $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^{n-5}}$, $\sum_{n=-4}^{\infty}\frac{1}{2^{n+4}}$ serileri olarak yazabiliriz.

10.3 İntegral Testi (Negatif Olmayan Terimli Seriler)

Temel soru, verilen bir serinin yakınsak olup olmadığını sorgulamaktır. Bunun için önce, negatif olmayan terimli serileri inceleyelim.

Her n için $a_n \geq 0$ olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini düşünelim. $s_{n+1} = s_n + a_n$ olduğundan, her kısmi toplam bir öncekinden büyük veya eşittir; bu yüzden

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$$

dir. Kısmi toplamlar dizisi azalmayan bir dizi olduğundan, Monotonik Dizi Teoremine göre aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç: Negatif olmayan terimli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ <u>harmonik serisinin</u> genel terimin limiti sıfır olmasına rağmen ıraksak olduğunu söylemiştik. Iraksak olduğunu şimdi yukardaki teoremi kullanarak gösterelim.

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots$$

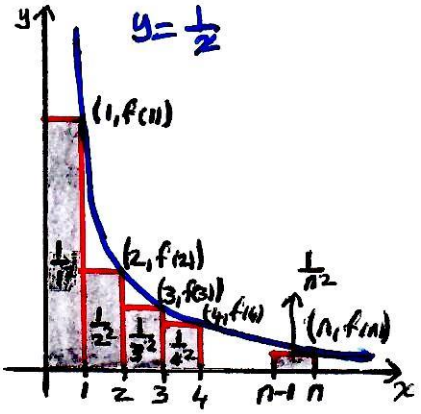
$n = 2^k$ ise kısmi toplam s_n, $k/2$ den büyük olacaktır. Kısmi toplamlar dizisi üstten sınırlı olmadığından, harmonik seri ıraksaktır.

İntegral Testi

Harmonik seriyle ilgili integral testini tanımlayalım. $\frac{1}{n}$ yerine, $\frac{1}{n^2}$ alalım:

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$ serisi yakınsak mıdır?

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin yakınsaklığını, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ile (kıyaslayarak) karşılaştırarak belirleyeceğiz. $f(x) = \frac{1}{x^2}$



$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

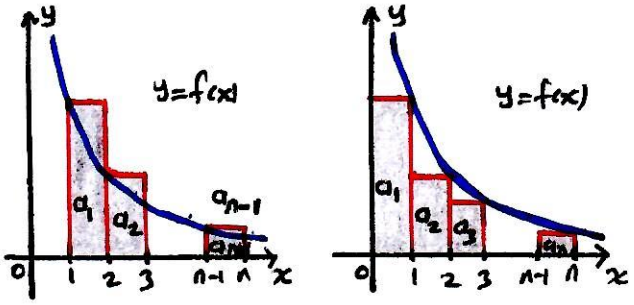
$$= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n)$$

$$< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < 1 + 1 = 2.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi s_n, üstten 2 ile sınırlı olduğundan seri yakınsaktır.

Teorem: İntegral Testi: $\{a_n\}$, pozitif terimli bir dizi olsun. Bütün $x \geq N$ (N pozitif bir tamsayı) için f, sürekli, pozitif, azalan ve $a_n = f(n)$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ile $\int_N^{\infty} f(x)dx$ integrali aynı karakterdedir. Yani ya ikisi birden yakınsak, ya da ikisi birden ıraksaktır.

Kanıt: $N=1$ durumunu ele alalım. Genel N için de kanıt benzerdir. Her n için f azalan ve $f(n)=a_n$ olsun.



$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^{n} f(x)dx$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx$$

Bu iki sonucu birleştirirsek

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her n için sağlandığından, $n \to \infty$ için de doğrudur. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sonlu ise eşitsizliğin sağ tarafı gösteriyor ki $\sum a_n$'de sonludur. $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sonsuz ise eşitsizliğin sol tarafı gösteriyor ki $\sum a_n$'de sonsuzdur. Bu yüzden, seri ve integralin ikisi birden sonlu veya ikisi birden sonsuzdur. ■

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$ **P-serisinin** $p>1$ ise yakınsak, $p \leq 1$ ise ıraksak olduğunu gösteriniz.

$p>1$ ise $f(x) = \frac{1}{x^p}$ pozitif ve azalandır.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \int_1^{\infty} x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$$

olduğundan İntegral Testine göre seri yakınsaktır. $p \leq 0$ ise n. terim testine göre seri ıraksaktır. $0<p<1$ ise $1-p>0$ ve

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} (b^{1-p} - 1) = \infty$$

olduğundan İntegral Testine göre seri ıraksaktır. $p=1$ için harmonik serinin ıraksak olduğunu daha önce göstermiştik.

Örnekler: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisi p-serisi değildir, ama İntegral Testine göre yakınsaktır. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ fonksiyonu, pozitif, sürekli ve $x \geq 1$ için azalandır.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(\arctan x\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\arctan b - \arctan 1\right) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

olduğundan integral Testine göre yakınsaktır. Fakat serinin toplamı $\frac{\pi}{4}$ değildir.

2) a) $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$ serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

a) $x \geq 1$ için $f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}$ pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^\infty \frac{x}{e^{x^2}}dx \left[\begin{matrix} u=x^2 \\ du=2x\,dx \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{du}{e^u} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-u}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^b}+\frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e}$$

integral yakınsak olduğundan, seri de yakınsaktır.

b) $x \geq 1$ için $f(x) = 1/2^{\ln x}$ pozitif, sürekli ve azalandır.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{2^{\ln x}} \left[\begin{matrix} u=\ln x \\ du=\frac{1}{x}dx \Rightarrow dx=e^u du \end{matrix}\right] = \int_0^\infty \frac{e^u du}{2^u} = \int_0^\infty \left(\frac{e}{2}\right)^u du = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}\left(\left(\frac{e}{2}\right)^b - 1\right)$$
$$= \infty$$

Genelleştirilmiş integral ıraksak olduğundan, seri de ıraksaktır.

Hata Tahmini

Geometrik veya teleskoping serileri gibi bazı yakınsak serilerin toplamını tam olarak bulabiliriz. Yani, kısmi toplamlar dizisinin s limit değerini bulabiliriz. Bununla beraber, çoğu yakınsak serinin tam sonucunu bulmak kolay değildir. Bu durumda, serinin ilk n terimini, yani s_n'yi yaklaşık değer alabiliriz, ama gerçek toplamdan ne kadar uzak olduğumuzu da bilmek gerekiyor.

$\sum a_n$ serisi, integral Testinde gösterildiği gibi yakınsak olsun. Serinin tam toplamı s ile n. kısmi toplamı s_n arasındaki fark olan R_n kalanının büyüklüğünü tahmin etmek istiyoruz:

$$R_n = s - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

İntegral Testinde kullandığımız şekillerden

$$\int_{n+1}^\infty f(x)dx \leq R_n = a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots \leq \int_n^\infty f(x)dx$$

olduğunu görebiliriz.

İntegral Testinde Kalan için Sınırlar $x \geq n$ için $f(x)$ fonksiyonu pozitif azalan, sürekli, $a_k = f(k)$ ve $\sum a_n$, s'ye yakınsasın. Bu durumda, kalan $R_n = s - s_n$

$$\int_{n+1}^\infty f(x)dx \leq R_n \leq \int_n^\infty f(x)dx$$

eşitsizliğini sağlar.

Yukardaki eşitsizliğin her tarafına s_n kısmi toplamını eklersek

$$s_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leq S \leq s_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx \qquad (*)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Örnek: $(*)$ eşitsizliğini kullanarak $\sum \frac{1}{n^2}$ serisinin toplamını tahmin ediniz. $n=10$ alınız.

$$\int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right|_n^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}.$$

$$s_{10}+\frac{1}{11} \leq S \leq s_{10}+\frac{1}{10}, \qquad s_{10} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{100} \approx 1.54977$$

$$1.64068 \leq S \leq 1.64977$$

S toplamını bu aralığın orta noktası alırsak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \approx 1.6452$ olarak bulurur. Bu yaklaşımın hatası, aralığın uzunluğunun yarısından, yani 0.005 den daha azdır. Trigonometrik Fourier serileri kullanılarak S'nin gerçek değerinin $\pi^2/6 \approx 1.64493$ olduğu gösterilebilir. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

10.4 Karşılaştırma Testleri

Karşılaştırma Testi (Doğrudan karşılaştırma Testi)

Teorem: Karşılaştırma Testi: $\sum a_n$, $\sum b_n$ ve $\sum c_n$ serileri negatif olmayan seriler ve bir N tamsayı için bütün $n>N$'ler

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

eşitsizliğini sağlasın.

a) $\sum c_n$ yakınsak ise $\sum b_n$'de yakınsaktır.

b) $\sum a_n$ ıraksak ise $\sum b_n$'de ıraksaktır.

Örnek: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{7n-2}$ serisi ıraksaktır. $\frac{7}{7n-2} = \frac{1}{n-\frac{2}{7}} > \frac{1}{n}$, yani serinin n. terimi, ıraksak harmonik serinin n. teriminden büyüktür.

b) $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots \leq 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$ $1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1+\frac{1}{1-1/2} = 3$. Birincisi $\sum \frac{1}{2^n}$ geometrik serisi yakınsak olduğundan $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ serisi yakınsaktır. İkincisi 3, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ serisi için bir üst sınır olduğundan, seri yakınsaktır.

c) $5+\frac{2}{3}+\frac{1}{7}+1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{8+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{2^n+\sqrt{n}}+\cdots$ serisi yakınsaktır.

Serinin ilk üç terimini ihmal eder, geriye kalan terimleri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ geometrik serisi ile karşılaştırırsak

$$1+\frac{1}{2+\sqrt{1}}+\frac{1}{4+\sqrt{2}}+\frac{1}{8+\sqrt{3}}+\cdots \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

dır. Geometrik seri yakınsak olduğundan, verilen seri yakınsaktır.

Limit Karşılaştırma Testi (Karşılaştırma Testinin Limit Şekli)

Teorem: Limit Karşılaştırma Testi: Bir N tamsayısı için $n>N$'ler için $a_n>0$ ve $b_n>0$ olsun. Bu durumda

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ise $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ aynı karakterdedir.

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ve $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum a_n$ yakınsaktır.

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ve $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

Kanıt: a) $c/2>0$ olduğundan, her $n>N$ için $\left|\frac{a_n}{b_n}-c\right|<\frac{c}{2}$ olacak şekilde bir N tamsayısı vardır. Her $n>N$ için

$$-\frac{c}{2}<\frac{a_n}{b_n}-c<\frac{c}{2} \Rightarrow \frac{c}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3c}{2} \Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)b_n<a_n<\left(\frac{3c}{2}\right)b_n$$

olduğundan $\sum b_n$ yakınsak ise $\sum\left(\frac{3c}{2}\right)b_n$ yakınsak olduğundan $\sum a_n$ yakınsak, $\sum b_n$ ıraksak ise $\sum\left(\frac{c}{2}\right)b_n$ ıraksak olduğundan $\sum a_n$ ıraksaktır. (2) ve (3)'ün kanıtı çalışma sorusu olarak size bırakılmıştır. ■

Örnekler: 1) Aşağıdaki serileri inceleyiniz.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2}$. $a_n=\frac{2n+1}{n^2+2n+1}$. Yeterince büyük n'ler için a_n, $\frac{2n}{n^2}$ gibi davranır, bu yüzden $b_n=\frac{1}{n}$ alabiliriz.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1/n^2+2n+1}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2.$$

Limit Karşılaştırma Testine göre $\sum b_n=\sum\frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan $\sum a_n$ ıraksaktır.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$. $a_n=\frac{1}{2^n-1}$. Yeterince büyük n'ler için a_n, $\frac{1}{2^n}$ gibi davranır, bu yüzden $b_n=\frac{1}{2^n}$ alabiliriz. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}=1$ ve $\sum\frac{1}{2^n}$ yakınsak olduğundan Limit Karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ yakınsaktır.

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$. $a_n = \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$. Yeterince büyük n'ler için a_n, $\frac{n\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}$ $n \geq 3$ için $\frac{1}{n}$'den büyüktür. $b_n = \frac{1}{n}$ alabiliriz.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \infty$$ ve $\sum \frac{1}{n}$ ıraksak olduğundan

L.K.T. göre $\sum a_n$ ıraksaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ yakınsak mıdır?

$\ln n$, herhangi pozitif c sabiti için n^c'den daha yavaş büyüdüğünden, yakınsak bir p-serisi ile karşılaştırma yapabiliriz.

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}. \qquad a_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}, \quad b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{1}{4} n^{-3/4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^{1/4}} = 0.$$

$\sum b_n = \sum 1/n^{5/4}$ $p = 5/4 > 1$ olduğundan p-serisi yakınsaktır. Limit karşılaştırma Testine göre $\sum a_n$ yakınsaktır.

10.5 Mutlak Yakınsaklık; Oran ve Kök Testleri

Bir serinin terimlerinden bazıları negatif ve diğer bazıları pozitif ise seri yakınsak olabilirde, olmayabilirde. Örneğin, geometrik

$$5-\frac{5}{4}+\frac{5}{16}-\frac{5}{64}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}5\left(-\frac{1}{4}\right)^n \qquad (*)$$

serisi $|r|=\frac{1}{4}<1$ olduğundan yakınsaktır. Fakat

$$1-\frac{5}{4}+\frac{25}{16}-\frac{125}{64}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{4}\right)^n$$

geometrik serisi, $|r|=\frac{5}{4}>1$ olduğundan ıraksaktır. Pozitif terimli

$$5+\frac{5}{4}+\frac{5}{16}+\frac{5}{64}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}5\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

serisi de yakınsaktır.

Tanım: $\sum |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum a_n$ serisine <u>mutlak yakınsak bir seri</u> denir.

(*) geometrik serisi mutlak yakınsak bir seridir.

Teorem: Mutlak Yakınsaklık Testi: $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ serisi yakınsaktır.

Kanıt: Her n için $-|a_n|\le a_n\le|a_n|$ dir. Buna göre $0\le a_n+|a_n|\le 2|a_n|$ $\sum|a_n|$ yakınsak ise $\sum 2|a_n|$ yakınsaktır. Doğrudan Karşılaştırma Testine göre $\sum(a_n+|a_n|)$ serisi de yakınsaktır. $a_n=(a_n+|a_n|)-|a_n|$ olduğundan

$$\sum a_n=\sum(a_n+|a_n|-|a_n|)=\sum(a_n+|a_n|)+\sum|a_n|.$$

Bu yüzden, $\sum a_n$ yakınsaktır. ■

Örnek: a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$ serisi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$ yakınsak olduğundan mutlak yakınsak bir seridir.

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}=\frac{\sin 1}{1}+\frac{\sin 2}{4}+\frac{\sin 3}{9}+\cdots$ serisi pozitif ve negatif terimli bir seridir. İlgili mutlak değerler serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|=\frac{|\sin 1|}{1}+\frac{|\sin 2|}{4}+\frac{|\sin 3|}{9}+\cdots$$

$|\sin n|\le 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serisi ile karşılaştırıldığında yakınsaktır. Verilen seri mutlak yakınsaktır.

Oran ve Kök Testleri

Teorem: Oran Testi: $\sum a_n$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

ise

1) $\rho<1$ olduğunda seri yakınsak
2) $\rho>1$ veya sonsuz olduğunda ıraksak
3) $\rho=1$ olduğunda test sonuç vermez

Kanıt: 1) $\rho<1$. r'yi $\rho<r<1$ alalım. Bu durumda, $\varepsilon=r-\rho$ pozitiftir.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\to\rho$ olduğundan, $\varepsilon=r-\rho$ için öyle bir N vardır ki $n>N$ 'lar için

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-\rho\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho+\varepsilon=r \text{ dir. Buna göre}$$

$$a_{N+1}<r a_N,$$
$$a_{N+2}<r a_{N+1}<r^2 a_N,$$
$$a_{N+3}<r a_{N+2}<r^3 a_N,$$
$$\vdots$$
$$a_{N+m}<r a_{N+m-1}<r^m a_N.$$

$n=1,2,\dots,N$ için $c_n=a_n$ ve $c_{N+1}=r a_N$, $c_{N+2}=r^2 a_N,\dots,c_{N+m}=r^m a_N,\dots$ alalım.
Her n için $a_n\le c_n$ dir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + r a_N + r^2 a_N + \cdots$$
$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N (1 + r + r^2 + \cdots + r^M + \cdots)$$

$|r|<1$ olduğundan $1+r+r^2+\cdots$ geometrik serisi yakınsaktır, dolayısıyla $\sum c_n$ yakınsaktır. $a_n \le c_n$ olduğundan $\sum a_n$'de yakınsaktır.

2) $1<\rho\le\infty$. Bir M indisinden sonra $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ dir ve $a_M<a_{M+1}<a_{M+2}<\cdots$ dir. $n\to\infty$ için serinin genel terimi sıfıra gitmez, bu yüzden n. Terim Testine göre seri ıraksaktır.

3) $\rho=1$. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ serileri için $\rho=1$ dir. Fakat biri ıraksak, diğeri yakınsaktır. ■

Örnek: Aşağıdaki serileri inceleyiniz.

a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n!\,n!}{(2n)!}$

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\,\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}}=\frac{2}{3}$

$\rho=\frac{2}{3}<1$ olduğundan Oran Testine göre seri yakınsaktır. Serinin toplamının 2/3 olduğu anlamına geldiğine dikkat ediniz. Serinin toplamı:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{3^n}=\frac{1}{1-(2/3)}+\frac{5}{1-(1/3)}=\frac{21}{2}$$ dir.

b) $a_n=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}\cdot\frac{n!\,n!}{(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}=4$

$\rho=4>1$ olduğundan seri ıraksaktır.

c) $a_n=\frac{4^n\cdot n!\,n!}{(2n)!}$ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$ dir. Oran Testine göre birşey söyleyemeyiz. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+2}{2n+1}>1$ olduğundan a_{n+1}, daima a_n'den daha büyük olacaktır. $a_1=2$ olduğundan, genel terimin limiti ∞ olacaktır. Dolayısıyla seri ıraksaktır.

Kök Testi

$$a_n=\begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift}\end{cases}$$ genel terimli $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{5}{2^5}+\cdots$

serisi geometrik seri değildir. Genel terim sıfıra gider, ama n. Terim Testi ve İntegral Testi ile çözemeyiz. Oran Testi

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases} 1/2n, & n \text{ tek} \\ \frac{n+1}{2}, & n \text{ çift}\end{cases}$$ oranı küçülüp, büyüdüğünden limiti yoktur.

Teorem: n. Kök Testi: $n \geq N$ için $a_n \geq 0$ ve $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$ ise $\sum a_n$ serisi,

a) $\rho < 1$ ise yakınsak

b) $\rho > 1$ veya sonsuz ise ıraksak

c) $\rho = 1$ ise test sonuç vermez

Kanıt: a) $\rho < 1$. $\rho + \varepsilon < 1$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ seçelim. $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$ olduğundan, öyle bir N sayısı vardır ki $n \geq N$ için

$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \varepsilon \Rightarrow a_n < (\rho+\varepsilon)^n$ dir. $\sum_{n=N}^{\infty} (\rho+\varepsilon)^n$ geometrik serisi yakınsak olduğundan, $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

b) $1 < \rho \leq \infty$. Bir M tamsayısından sonra $\sqrt[n]{a_n} > 1$ olacağından, serinin terimleri sıfıra yakınsamaz. n. Terim Testine göre seri ıraksaktır.

c) $\rho = 1$. $\sum \frac{1}{n}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ serileri için $\rho = 1$, fakat harmonik seri ıraksak, diğeri yakınsaktır. ■

Örnekler: 1) Genel terimi $a_n = \begin{cases} n/2^n, & n \text{ tek} \\ 1/2^n, & n \text{ çift} \end{cases}$ olan $\sum a_n$ serisi yakınsaktır.

$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{n}/2, & n \text{ tek} \\ 1/2, & n \text{ çift} \end{cases}$, $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$, Sandeviç Teoreminden $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} = \rho < 1$ olduğundan n. kök Testine göre seri yakınsaktır.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ serilerinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ serisi yakınsaktır.

$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} \to 2 > 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ serisi ıraksaktır.

10.6 Alterne Seriler ve Şartlı Yakınsaklık

Bir serinin terimleri değişmeli olarak bir pozitif ve bir negatif olarak yazılıyorsa, seriye <u>alterne seri</u> denir. Örneğin

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\dots$$

$$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{(-1)^n 4}{2^n}+\dots$$

$$1-2+3-4+5-6+\dots+(-1)^{n+1}n+\dots$$

serileri alterne serilerdir. Bu örneklerden de görüleceği gibi bir alterne serinin n. terimi

$$a_n=(-1)^{n+1}u_n \quad \text{veya} \quad a_n=(-1)^n u_n$$

formundadır. Burada $u_n=|a_n|$ bir pozitif sayıdır.

Teorem: Alterne Seri Testi: (Leibniz's Teoremi) Aşağıdaki üç şart sağlanırsa

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\dots$$

alterne serisi yakınsaktır.

1) $u_n\geq 0$ (Her n için)
2) Bir N tamsayısından sonraki n'ler için, yani $n\geq N$ için, $u_n\geq u_{n+1}$
3) $u_n\to 0$.

Kanıt: n, çift tamsayı ise $n=2m$ diyelim, bu durumda ilk n terimin toplamı

$$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\dots+(u_{2m-1}-u_{2m})$$
$$=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)+\dots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m}$$

dır. İlk eşitlikte, bütün paranteli terimler pozitif olduğundan (veya sıfır) $S_{2m+2}\geq S_{2m}$ yani dizi azalmayandır. İkinci eşitlik $S_{2m}\leq u_1$ olduğunu gösteriyor. Buna göre, S_n azalmayan ve üstten sınırlıdır. Dolayısıyla,

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m}=L$$

dir. Eğer n tek ise, $n=2m+1$, ilk n terimin toplamı $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}$ dir. $u_n\to 0$ olduğundan $\lim_{m\to\infty}u_{2m+1}=0$ dır. $S_{2m+1}=S_{2m}+u_{2m+1}\to L+0=L$.
Yani $\lim_{n\to\infty}S_n=L$ dir. ■

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ alterne harmonik seri, Teoremdeki üç şartı da sağladığı için yakınsak bir seridir.

Teorem: Alterne Seri Tahmin Teoremi: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ alterne serisi Leibniz Teoremini sağlıyorsa, $n \geq N$ için, serinin L toplamı olarak yaklaşık

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

alındığında, yapılan hatanın mutlak değeri u_{n+1}'den küçüktür. Ayrıca L toplamı s_n ve s_{n+1} kısmi toplamları arasındadır ve kalan, $L - s_n$, kullanılmayan ilk terimin işaretiyle aynıdır.

Örnekler: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \frac{1}{256} - \cdots$ serisinin toplamının $\frac{1}{1-(-1/2)} = 2/3$ olduğunu biliyoruz. Şimdi serinin toplamı olarak ilk sekiz terimin toplamını alalım. Bu durumda, yapılan hata $\frac{1}{256}$'dan küçüktür. İlk sekiz terimin toplamı $s_8 = 0.6640625$ ve $s_9 = 0.66796875$ dir. Gerçekten $0.6640625 < 2/3 < 0.66796875$ dir. $\frac{2}{3} - 0.6640625 = 0.0026041666\ldots$ pozitif ve $\frac{1}{256} = 0.0039062\,5$'den daha küçüktür.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10n}{n^2+16}$ serisinin yakınsaklığını inceleyiniz.

$u_n = \frac{10n}{n^2+16} > 0$, $f(x) = \frac{10x}{x^2+16} \Rightarrow f'(x) = \frac{10(16-x^2)}{(x^2+16)^2} \leq 0$ $x \geq 4$ dolayısıyla $n \geq 4$ için $u_{n+1} \leq u_n$ ve $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ olduğundan Leibniz Teoremine göre verilen seri yakınsaktır.

Şartlı Yakınsaklık

Tanım: Yakınsak seri, mutlak yakınsak değilse <u>şartlı yakınsaktır</u> denir.

Alterne harmonik seri şartlı yakınsaktır.

Örnek: a) p, pozitif bir sabitse $\frac{1}{n^p}$ azalan ve limiti sıfır olduğundan alterne p-serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \quad p > 0$$

yakınsaktır. $p > 1$ ise seri mutlak yakınsak, $0 < p \leq 1$ ise şartlı yakınsaktır.

$p = \frac{3}{2}$ mutlak yakınsak: $1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots$

$p = \frac{1}{2}$ şartlı yakınsak: $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 - \cdots$ serisi $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$ olduğundan n.Terim Testine göre ıraksaktır.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{2^n} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots$ serisi alterne seri değildir.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n(n+1)/2}\frac{1}{2^n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ geometrik serisi yakınsak olduğundan, verilen seri mutlak yakınsaktır.

Yeniden Düzenlenen Seriler

Sonlu bir toplamın terimlerini yeniden düzenleyebiliriz. Aynı sonuç, mutlak yakınsak sonsuz seriler içinde doğrudur.

Teorem: Mutlak Yakınsak Seriler İçin Yeniden Düzenleme Teoremi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mutlak yakınsak ve $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ $\{a_n\}$ dizisinin herhangi bir yeniden düzenlenmişi ise $\sum b_n$ mutlak yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dir.

Şartlı yakınsak serilerin terimleri, yeniden düzenlenirse farklı sonuçlar elde edilebilir. Şartlı yakınsak bir serinin terimleri yeniden düzenlenerek, toplamı istenilen herhangibir r reel sayısı yapılabilir.

Örnek: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\cdots$

a) Seri yeniden düzenlenerek, $\sum\frac{1}{2n-1}$ ve $\sum -\frac{1}{2n}$ iki ıraksak serinin toplamı olarak yazılabilir.

b) Serinin 1'e yakınsamasını sağlayalım. İlk terim 1, ikinci terim $-\frac{1}{2}$ olalım. Sonra $\frac{1}{3}$ ve $\frac{1}{5}$ ekleyelim. Bu 1'i geçecektir. Bu durumda, toplam 1'den küçük olana kadar negatif terim ekliyoruz. Daha sonra, toplam 1'den büyük olana kadar pozitif terim ekliyoruz. Bu işleme, kısmi toplamlar dizisi 1'e yakınsayana kadar devam edilir: $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{10}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{14}+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+\cdots$.

c) Alterne harmonik seri bir L sayısına yakınsıyor. Teoreme göre, $s_2=\frac{1}{2} < L < \frac{5}{6}$ arasındadır.

$$2L = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\right) = 2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{5}+\frac{2}{11}\cdots$$

$$= (2-1)-\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{6}+\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{8}+\cdots$$

$$= 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = L.$$

$2L=L \Rightarrow L=0$ çelişki.

10.7 Kuvvet Serileri

Tanım: Kuvvet Serileri: $x=0$ civarında bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

formundaki bir seridir. $x=a$ civarında bir kuvvet serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

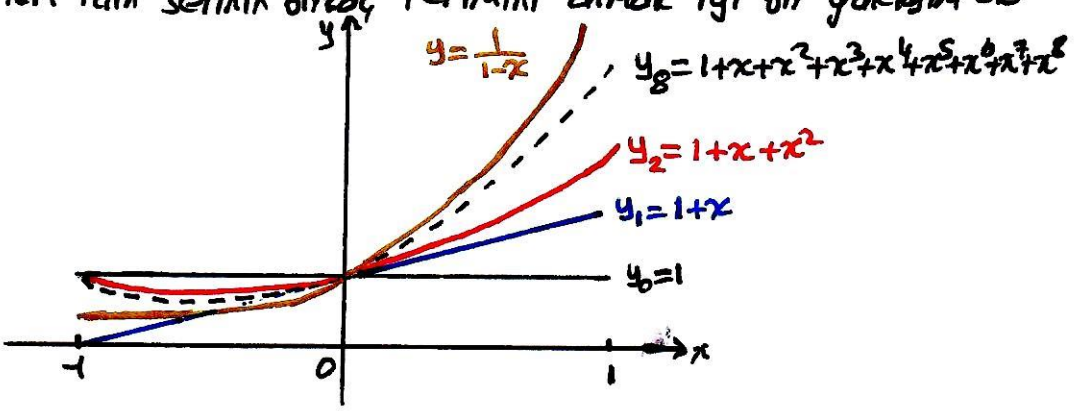
formundaki bir seridir. a merkez, $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ katsayıları sabitlerdir.

Örnekler: 1) Her n için c_n katsayılarını 1 olduğunuzda

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Kuvvet serisi, bir geometrik seridir ve $|x|<1$ için yakınsaktır. Serinin toplamı $\frac{1}{1-x}$ dir. Yani $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$, $-1<x<1$. (*)

Şimdiye kadar, (*) denklemini serinin toplamı olarak kullandık. Şimdi odağınızı değiştiriyoruz: sağda serinin kısmi toplamlarını $P_n(x)$ polinomlarının solda fonksiyona yaklaşması olarak düşünüyoruz. Sıfırın yanındaki x değerleri için serinin birkaç terimini almak iyi bir yaklaşım olacaktır.



2) $1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^2 + \cdots$ kuvvet serisi $a=2$ merkezli ve katsayıları $c_0=1$, $c_1=-1/2$, $c_2=1/4, \ldots, c_n=(-1/2)^n, \ldots$ dır. Bu, ilk terimi 1 ve $r=-\frac{x-2}{2}$ olan bir geometrik seridir. Toplamı

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

dır. Seri $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$ veya $0<x<4$ için yakınsaktır. Dolayısıyla

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} - \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \quad 0<x<4.$$

3) Aşağıdaki kuvvet serileri hangi x değerleri için yakınsaktır?

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n = 1+x+2!\,x^2+3!\,x^3+\dots$

u_n kuvvet serilerinin n. terimi olmak üzere, $\sum|u_n|$ serisine Oran Testini uygulayalım.

a) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n-1}x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$. Seri $|x|<1$ ise mutlak yakınsak, $|x|>1$ ise ıraksaktır. $x=1$'de seri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ alterne harmonik seridir ve yakınsaktır. $x=-1$ de seri $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}$ serisi olurki bu ise harmonik serinin negatifidir ve ıraksaktır. Buna göre seri $-1<x\le 1$ aralığında yakınsaktır, diğer durumlarda ıraksaktır.

b) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2$. Seri $x^2<1$ ise mutlak yakınsak, $x^2>1$ ise ıraksaktır. $x=-1$'de seri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$ alterne serisi olur. Leibniz Teoremine göre seri yakınsaktır. $x=1$'de seri $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$ alterne serisi olur. Bu da yukarıdaki ($x=-1$) serinin negatifidir. Seri yakınsaktır. Sonuçta seri, $-1\le x\le 1$ aralığında yakınsak, diğer noktalarda ıraksaktır.

c) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$. Her x için, limit sıfır çıktığından, seri her x için mutlak yakınsaktır.

d) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$ $(x\neq 0)$. Seri $x=0$ haricinde ıraksaktır.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\dots$ serisi $x=c\neq 0$ noktasında yakınsak ise $|x|<|c|$ şartını sağlayan bütün x'ler için seri mutlak yakınsaktır. Seri $x=d$ noktasında ıraksak ise, $|x|>|d|$ şartını sağlayan bütün x'ler için ıraksaktır.

Kanıt: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n c^n$ yakınsak olsun. Bu durumda, n. Terim Testinden $\lim_{n\to\infty}a_n c^n=0$ dır. Yani, öyle bir N tamsayısı vardırki $n>N$ için $|a_n c^n|<1$ dir. Buna göre

her $n>N$ için $\qquad |a_n| < \frac{1}{|c|^n}$ $\qquad (*)$

dir. $|x|<|c|$ olacak şekilde herhangi bir x alalım. Bu durumda $\frac{|x|}{|c|}<1$ dir. $(*)$ denkleminin her iki tarafını $|x|^n$ ile çarpalım: $n>N$ için

$$|a_n||x|^n < \frac{|x|^n}{|c|^n}.$$

$\left|\frac{x}{c}\right|<1$ olduğundan, $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x}{c}\right|^n$ geometrik serisi yakınsaktır. Karşılaştırma Testine göre, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n$ serisi de yakınsaktır. Dolayısıyla, $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ orjinal serisi de $-|c|<x<|c|$ aralığında mutlak yakınsaktır.

$x=d$'de $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ serisi ıraksak olsun. Eğer $|x|>|d|$ şartını sağlayan bir x noktasında seri yakınsak olsaydı, teoremin birinci kısmına göre d noktasında da yakınsak olmalıydı çelişkisi yaşardık. Buna göre $|x|>|d|$ şartını sağlayan her x için seri ıraksaktır. ■

Sonuç: Kuvvet Serilerinin Yakınsaklık Teoremi: $\sum c_n(x-a)^n$ serisinin yakınsaklığı, aşağıdaki üç durumdan biri ile tanımlanır:

1) $|x-a|>R$ şartını sağlayan x'ler için seri ıraksak, $|x-a|<R$ şartını sağlayan x'ler için seri mutlak yakınsak olacak şekilde bir R pozitif sayısı vardır. $x=a+R$ ve $x=a-R$ uç noktalarında seri yakınsak veya ıraksak olabilir.
2) Seri her x için mutlak yakınsaktır ($R=\infty$).
3) Seri $x=a$'da yakınsak, diğer noktalarda ıraksaktır ($R=0$).

Kanıt: $a=0$ alalım. (Değilse $x'=x-a$ ile çözümü benzer yaparız). Seri heryerde yakınsak ise (2) durumu, yalnız $x=0$'da yakınsak ise (3) durumu oluşur. Bunların dışında, sıfırdan farklı öyle bir pozitif d sayısı vardır ki $\sum_{n=0}^{\infty}c_nd^n$ ıraksaktır. S kümesi, $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ serisinin yakınsak olduğu x'lerin kümesini göstersin. S kümesi, $|x|>|d|$ şartını sağlayan x'leri içermez. Yukarıdaki teoremden dolayı. Dolayısıyla, S kümesi sınırlıdır ve $\sup S=R$ vardır. (3) durumu olmadığından, serinin yakınsadığı en az bir $b\neq 0$ sayısı vardır. Teoremden dolayı $(-|b|,|b|)$ aralığında seri yine yakınsaktır. Dolayısıyla $R>0$ dır.

$|x|<R$ ise $|x|<c<R$ olacak şekilde, S'de bir c noktası vardır. Aksi durumda R, sup S olamaz. Seri c'de yakınsaktır, Teoremden dolayı da x'de mutlak yakınsaktır.

$|x|>R$ olsun. Eğer seri x'de yakınsak ise Teoremden dolayı $(-|x|,|x|)$ açık aralığında mutlak yakınsaktır, dolayısıyla S bu aralığı içerir. Bu ise R'nin sup S olması ile çelişkidir. Buna göre $|x|>R$ ise seri ıraksaktır. ■

R'ye kuvvet serisinin <u>yakınsaklık yarıçapı</u> denir ve $x=a$ merkezli R yarıçaplı aralığa da <u>yakınsaklık aralığı</u> denir. Yakınsaklık aralığı açık, kapalı veya yarı-açık olabilir.

Yakınsaklık aralığını bulmak için Oran Testi veya kök Testi kullanılır.

Teorem: Terim-Terime Türetme Teoremi: Eğer $\sum c_n(x-a)^n$ serisi $R>0$ yakınsaklık yarıçapına sahipse $a-R<x<a+R$ aralığında bir

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

fonksiyonu tanımlar. Bu fonksiyon, aralıkta her mertebeden türeve sahiptir ve bu türevi, orjinal seriyi terim-terime türeterek elde ederiz:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1},$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2},$$

$$\vdots$$

Türevlenmiş her bir seri, $a-R<x<a+R$ aralığında yakınsaktır.

Örnek: $f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $-1<x<1$ ise f' ve f'' serilerini bulunuz.

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},\quad -1<x<1.$$

$$f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=2+6x+12x^2+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2},\quad -1<x<1.$$

Uyarı: Terim-terime türetme, diğer tip serilerde çalışmaz. Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!x)}{n^2}$ serisi her x için yakınsaktır. Fakat bu seriye terim-terime türetirsek $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ serisini elde ederiz. Bu seri her x için ıraksaktır. (kuvvet serisi değildir)

Teorem: Terim-terime İntegrasyon: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisi $a-R<x<a+R$ $(R>0)$ aralığında yakınsak olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

serisi $a-R<x<a+R$ aralığında yakınsaktır ve $a-R<x<a+R$ aralığında

$$\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

dir.

Örnekler: 1) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$, $-1\leq x\leq 1$ fonksiyonunu tanımlayınız.

$$f'(x) = 1-x^2+x^4-x^6+\cdots, \quad -1<x<1 \quad \text{geometrik bir seridir.}$$

Birinci terimi 1 ve $r=-x^2$ dir, buna göre $f'(x)=\frac{1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}$ dir.

$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$'yi integre edersek

$$\int f'(x)dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}x + C.$$

$x=0$'da $f(0)=0$ olduğundan $C=0$ dır. $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\tan^{-1}x$, $-1<x<1$

$x=\pm 1$ uç noktalarında serinin yakınsak olduğunu görebiliriz.

Bir Seri Olarak π sayısı: $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$.

2) $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\cdots$ serisi $-1<t<1$ açık aralığında yakınsaktır. Bu yüzden

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\left(t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}+\cdots\right)_0^x = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

veya $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$, $-1<x<1$. Bu seri $x=1$'de de yakınsaktır ve toplamı $\ln 2$ dir.

Orjinal seriler uç noktalarda yakınsak olsalar dahi, teorem elde edilen serilerin açık aralıktaki yakınsaklığını garanti ediyor.

Kuvvet Serilerinin Çarpımı

Teorem: $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve $B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $|x|<R$ aralığında mutlak yakınsak ve $c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0=\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $|x|<R$ aralığında $A(x)B(x)$'e mutlak yakınsar:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Örnek: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$ geometrik serisini kendisi ile çarparak, $|x|<1$ için $\frac{1}{(1-x)^2}$'in kuvet serisini bulalım.

$$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \frac{1}{1-x}$$

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots = \frac{1}{1-x}$$

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k} + \dots + a_n b_0 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ tane}} = n+1.$$

$$A(x)B(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots+(n+1)x^n+\dots$$ dir.

Seri $|x|<1$ aralığında mutlak yakınsaktır. Terim-terime türetmede de aynı sonucu bulmuştuk: $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Teorem: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serisi $|x|<R$ için mutlak yakınsak ise $|f(x)|<R$ üzerinde herhangi sürekli fonksiyon için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (f(x))^n$ mutlak yakınsaktır.

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi $|x|<1$ için mutlak yakınsak olduğundan, teoreme göre $\frac{1}{1-4x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(4x^2)^n$ seriside $|4x^2|<1$ veya $|x|<\frac{1}{2}$ için mutlak yakınsaktır.

10.8 Taylor ve Maclaurin Serileri

Geometrik seriden, nasıl bir kuvvet serisi üretebileceğimizi gördük. Şimdi bunu, bir fonksiyonun kuvvet serisi ile temsiline genişleteceğiz. Bu bölümde, fonksiyonların Taylor serisi dediğimiz kuvvet serilerini nasıl ürettiğini göstereceğiz.

Seri Gösterimleri (Temsilleri)

Terim-terime türetme teoreminden biliyoruz ki yakınsaklık aralığı içinde bir kuvvet serisinin toplamı, her mertebeden türevi olan bir sürekli fonksiyondur. Şimdi, sunu soralım: her mertebeden türevi olan bir fonksiyon, bir kuvvet serisi ile ifade edilebilir mi? Edilebilirse, katsayıları nelerdir?

Bu soruların cevabını verebiliriz. $f(x)$ fonksiyonunun, $x=a$ civarında bir kuvvet serisinin toplamı olarak yazıldığını düşünelim:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

Yakınsaklık aralığında terim-terime türeterek aşağıdaki türevleri elde edelim:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + n a_n (x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f''(x) = 1.2\, a_2 + 2.3 a_3 (x-a) + \cdots + (n-1) n\, a_n (x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f'''(x) = 2.3 a_3 + 2.3.4\, a_4 (x-a) + \cdots + (n-2)(n-1) n\, a_n (x-a)^{n-3} + \cdots$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\, a_n + (x-a) \text{ çarpanını içeren toplamlar}$$

$x=a$'da bu denklemler sağlandığından;

$$f(a)=a_0,\ f'(a)=a_1,\ f''(a)=2!\,a_2,\ f'''(a)=3!\,a_3,\ \cdots,\ f^{(n)}(a)=n!\,a_n,\ \cdots$$

dir. Buna göre a_n katsayıları, $n=0,1,2,\cdots$ için aşağıdaki gibidir.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Eğer f bir seri gösterimine sahipse, bu seri

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

olmalıdır.

$x=a$'yı içeren bir aralıkta sonsuz diferansiyellenebilen bir f fonksiyonu bu seriyi üretiyorsa, yakınsaklık aralığındaki her x için seri $f(x)$'e yakınsayacak mı? Cevap: olabilir, fakat bazı fonksiyonlar için olmayabilirde.

Tanım: iç nokta olarak a noktasını içeren bir aralıkta, f, her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olsun. <u>$x=a$'da f ile üretilen Taylor serisi</u>

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

dir. f'nin <u>Maclaurin serisi</u>, $x=0$'da f ile üretilen Taylor serisidir veya

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots$$

dir.

Örnek: $a=2$'de $f(x)=1/x$ ile üretilen Taylor serisini bulunuz. Seri $1/x$'e yakınsar mı? Yakınsarsa nerede?

$$f(x)=x^{-1},\quad f'(x)=-x^{-2},\quad f''(x)=2!\,x^{-3},\ \dots,\quad f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\,x^{-(n+1)},$$

$$f(2)=2^{-1}=\frac{1}{2},\quad f'(2)=-\frac{1}{2^2},\quad \frac{f''(x)}{2!}=\frac{1}{2^3},\ \dots,\quad \frac{f^{(n)}(2)}{n!}=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}},\ \dots$$

Taylor serisi

$$f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(x)}{2!}(x-2)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+\dots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{2^2}+\frac{(x-2)^2}{2^3}-\dots+(-1)^n\frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}+\dots$$

dir. Bu, ilk terimi $1/2$, $r=-(x-2)/2$ olan bir geometrik seridir. $|x-2|<2$ aralığında mutlak yakınsak ve toplamı $\dfrac{1/2}{1+(x-2)/2}=1/x$ dir.

$a=2$'de $f(x)=1/x$ ile üretilen Taylor serisi $0<x<4$ aralığında $1/x$'e yakınsar.

Tanım: f, iç nokta olarak a noktasını içeren bir aralıkta, $k=1,2,\dots,N$ olmak üzere k. mertebeden türeve sahip, bir fonksiyon olsun. Bu durumda, 0'dan N'ye herhangibir n tamsayısı için $x=a$'da f ile üretilen n. mertebeden <u>Taylor polinomu</u>

$$P_n(x)=f(a)+f(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

dir.

Örnekler: 1) $x=0$'da $f(x)=e^x$ ile üretilen Taylor serisi ve Taylor polinomunu bulunuz.

Her $n=0,1,2,\dots$ için $f^{(n)}(x)=e^x$ ve $f^{(n)}(0)=1$ olduğundan, $x=0$'da f ile üretilen Taylor serisi

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots=1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

dır. Bu aynı zamanda e^x'in Maclaurin serisidir. $x=0$'da n. mertebeden Taylor polinomu

$$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$

dır.

2) $x=0$'da $f(x)=\cos x$ ile üretilen Taylor serisi ve Taylor polinomunu bulunuz.

$$f(x)=\cos x \qquad f'(x)=-\sin x$$

$$f''(x)=-\cos x \qquad f'''(x)=\sin x$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x \qquad f^{(2n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sin x$$

$x=0$'da $\quad f^{(2n)}(x)=(-1)^n \qquad f^{(2n+1)}(0)=0$

$x=0$'da f ile üretilen Taylor serisi (Maclaurin serisi)

$$1+0.x-\frac{x^2}{2!}+0.x^3+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$f^{(2n+1)}(0)=0$ olduğundan $2n$ ve $2n+1$. mertebeden Taylor polinomları denktir:

$$P_{2n}(x)=P_{2n+1}(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

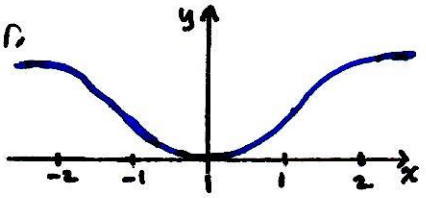
Uyarı: n. mertebeden Taylor polinomu tanımında, n. mertebe, n ve n'den küçük anlamında kullanılmıştır.

e^x ve $\cos x$ fonksiyonlarının Taylor serileri her x için kendileri ne yakınsayacağını birazdan göstereceğiz.

3) $f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ e^{-1/x^2}, & x\neq 0\end{cases}$ fonksiyonunun $x=0$'da her mertebeden türevi vardır ve $f^{(n)}(0)=0$ dır. $x=0$'da f ile üretilen Taylor serisi

$$f(0)+f'(0)x+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots=0+0x+0x^2+\dots+0x^n+\dots=0+0+0+\dots+0+\dots$$

her x için yakınsaktır ve toplamı 0'dır. Fakat yalnız $x=0$'da $f(x)$'le yakınsar. Yani, bu örnekte $f(x)$ ile üretilen Taylor serisi yakınsaklık aralığı üzerinde $f(x)$ fonksiyonuna eşit değildir.



10.9 Taylor Serilerinin Yakınsaklığı

İki soruyu daha cevaplamadık:

1) Bir Taylor serisi, üreten fonksiyona hangi x değerlerinde yakınsar.

2) Bir fonksiyonun Taylor polinomu, verilen bir aralıkta fonksiyona yaklaşımı ne kadar doğrudur. Gerçek değerle fark ne kadardır.

Bir Taylor Polinomunun Kalanı

Bir $R_n(x)$ kalanını

$$\boxed{\underbrace{f(x)}_{\text{Tam değer}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Yaklaşık değer}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{Kalan}}}$$

olarak tanımlıyoruz. Mutlak değer $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$'e yaklaşım ile ilgili hata denir.

Teorem: Taylor Teoremi: f ve onun ilk n türevi $f', f'', \dots, f^{(n)}$ türevleri $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f^{(n)}$, (a,b) aralığında diferansiyellenebilirse, a ile b arasında öyle bir c sayısı vardır ki

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

dir.

Taylor Teoremi, ODT'nin bir genellemesidir. Teorem $[b,a]$ olması durumunda da doğrudur. Yani $b<a$ ise eşitlik sağlanır.

Kanıt: $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Herhangi K sabiti için $K(x-a)^{n+1}$ terimini $P_n(x)$'e ekleyelim:

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x-a)^{n+1}$$

K sabitini, $x=b$'de $y=f(x)$ orjinal eğri ile $y=\phi_n(x)$ eğrisini aynı yapacak şekilde seçelim: $f(b) = \phi_n(b) = P_n(b) + K(b-a)^{n+1} \Rightarrow K = \frac{f(b)-P_n(b)}{(b-a)^{n+1}}$.

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x) = f(x) - [P_n(x) + \{f(b)-P_n(b)\}/(b-a)^{n+1}](x-a)^{n+1}$$

olarak tanımlayalım.

$F(a)=F(b)=0$ ve F, F', $[a,b]$'de sürekli olduğundan Rolle Teoremini uygulayabiliriz. Buna göre $\exists\, c_1 \in (a,b)$ vardır ki $F'(c_1)=0$ dır. $F'(a)=F'(c_1)=0$ ve F', F'', $[a,b]$'de sürekli olduğundan tekrar Rolle Teoremini uygulayabiliriz: $\exists\, c_2 \in (a,b)$, $F''(c_2)=0$ dır.

Rolle Teoremi, $F'', F''', \dots, F^{(n-1)}$ fonksiyonlarına uygulanabilir. Buna göre

$$c_3 \in (a, c_2) \ , \quad F'''(c_3)=0$$
$$c_4 \in (a, c_3) \ , \quad F^{(4)}(c_4)=0$$
$$\vdots$$
$$c_n \in (a, c_{n-1}) \ , \quad F^{(n)}(c_n)=0$$

dır. Son olarak, $F^{(n)}$, $[a, c_n]$ aralığında sürekli, (a, c_n) aralığında diferansiyellenebilir ve $F^{(n)}(a)=F^{(n)}(c_n)=0$ olduğundan Rolle Teoremine göre $\exists\, c_{n+1} \in (a, c_n)$ vardır ki $F^{(n+1)}(c_{n+1})=0$ dır. $F^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0-(n+1)!\,K$ (a,b)'de öyle bir $c=c_{n+1}$ vardır ki $K=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ dır. Yani

$$f(b)=P_n(b)+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

dır. ■

Taylor Formülü: f, a'yı içeren bir açık aralıkta bütün türevlere sahipse her pozitif tamsayı n ve I'daki her x için

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

dır. Burada $R_n(x)$, a ile x arasındaki bir c için

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dır.

Eğer her $x \in I$ için $n \to \infty$ iken $R_n(x) \to 0$ ise $x=a$'da f ile üretilen Taylor serisi, I'da f'ye <u>yakınsar</u> ve

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

yazılır.

Örnek: $x=0$'da $f(x)=e^x$ ile üretilen Taylor serisinin her x için $f(x)$'e yakınsadığını gösteriniz.

$I=(-\infty,\infty)$ aralığında, fonksiyonun her mertebeden türevi vardır ve Taylor formülü $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$, 0 ile x arasındaki bir c için $R_n(x)=\dfrac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$ dır. e^x artan olduğundan, e^c, $e^0=1$ ile e^x arasındadır. $x<0$ ise $e^c<1$ dır. $x=0$ ise $e^x=1$, $R_n(x)=0$, $x>0$ ise $e^c<e^x$ dır.

$$|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \le 0,\ e^c<1)$$
$$|R_n(x)| \le e^x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (x \ge 0,\ e^c<e^x)$$

Her x için $\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$

olduğundan $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ dır. Yani her x için seri e^x'e yakınsar. Bu yüzden

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

dır. $x=1$ alınırsa $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$ $\boxed{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}}$

dir. 0 ile 1 arasındaki bir c için $R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$, $e^c < e^1 < 3$.

Kalan Tahmini

Teorem: Kalan Tahmini Teoremi: x ve a arasındaki bütün t'ler için $|f^{(n+1)}(t)| \le M$ olacak şekilde bir M pozitif sayısı varsa Taylor Teoremindeki kalan terim $R_n(x)$,

$$|R_n(x)| \le M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

eşitsizliğini sağlar. Her n için bu eşitsizlik sağlanır ve f, Taylor Teoremin diğer koşullarını sağlarsa, seri $f(x)$'e yakınsar.

Örnekler: 1) $x=0$'da $\sin x$'in Taylor serisinin her x için $\sin x$'e yakınsadığını gösteriniz.

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f'''(x) = -\cos x$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \qquad f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$$
$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x).$$

$\sin x$'in bütün türevleri mutlak değerce 1 veya 1'den daha küçük olduğundan $M=1$ alarak Kalan Tahmini Teoremini uygulayabiliriz:

$$|R_{2k+1}(x)| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!} = 0$ olduğundan $R_{2k+1}(x) \to 0$ dır ve $\sin x$'in Maclaurin serisi her x için $\sin x$'e yakınsar.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots.$$

2) $x=0$'da $\cos x$'in Taylor serisinin, her x için $\cos x$'e yakınsadığını gösteriniz.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x).$$

$\cos x$'in bütün türevlerinin mutlak değeri 1'den küçük veya 1'e eşit olduğundan $M=1$ alındığında Kalan Tahmin Teoremine göre

$$|R_{2k}(x)| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

dir. x'in her değeri için $R_{2k}(x) \to 0$ dır. Bu yüzden, her x için $\cos x$'e yakınsar.

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

3) e sayısını 10^{-6}'dan küçük hata ile hesaplayınız.

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1), \qquad R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!}$$

c, 0 ile 1 arasında bir sayı. $0<c<1$ için $1<e^c<3$ olduğundan

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

dir. $\frac{1}{9!} > 10^{-6}$ ve $\frac{3}{10!} < 10^{-6}$ olduğunu bulabiliriz. Buna göre n'yi en azından 9 almalıyız. Sonuçta $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$.

Şimdiye kadar bulduğumuz Maclaurin (Taylor) serilerini bir tabloda gösterelim.

1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \lvert x\rvert<1.$
2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-x)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \lvert x\rvert<1$
3) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, her x.
4) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, her x
5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, her x
6) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1<x\leq 1$
7) $\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad -1\leq x\leq 1$

Taylor Serilerini Birleştirme

Yakınsaklık aralıklarının kesişiminde, Taylor serileri toplanabilir, çıkarılabilir veya çarpılabilir.

Örnekler: 1) $\cos x$'in Maclavrin serisini kullanarak $\cos 2x$'in Maclaurin serisini bulabiliriz:

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{2^2x^2}{2!} + \frac{2^4x^4}{4!} - \frac{2^6x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k}x^{2k}}{(2k)!}$$

$\cos x$, $-\infty < x < \infty$ aralığında doğru olduğundan, $-\infty < 2x < \infty$ aralığında da yeni seri doğrudur.

2) $x \sin x$'in Maclavrin serisini bulunuz.

$$x \sin x = x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

$\sin x$, her x için yakınsak olduğundan, yeni seri de her x için yakınsaktır.

3) $$\frac{1}{3}(2x + x\cos x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{72} - \cdots$$

4) $$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots$$

5) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\right)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} - \cdots\right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{5} + \frac{x^4}{7} - \cdots\right) = \frac{1}{3}.$$

Örnek: $P(x) = x^4 - 12x + 5$ polinomunu $(x-2)$'nin kuvvetleri cinsinden yazınız.

$P'(x) = 4x^3 - 12$, $P''(x) = 12x^2$, $P'''(x) = 24x$, $P^{(4)}(x) = 24$, $P^{(n)}(x) = 0$, $n \geq 5$.

$P(2) = -3$, $P'(2) = 20$, $P''(2) = 48$, $P'''(2) = 48$, $P^{(4)}(2) = 24$, $P^{(n)}(2) = 0$, $n \geq 5$.

$$P(x) = P(2) + \frac{P'(2)}{1!}(x-2) + \frac{P''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{P^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 + \underbrace{\frac{P^{(5)}(2)}{5!}(x-2)^5 + \cdots}_{0}$$

$$= -3 + 20(x-2) + 24(x-2)^2 + 8(x-2)^3 + (x-2)^4.$$